

Арифметические основы компьютерной техники. Пример.

Даны два числа:

176.54 и 215.17

Задание 1

Перевести числа в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Затем перевести числа в восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления в двоичную и сравнить результаты.

Переведём в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления первое число.

Сначала переводим целую часть первого числа.

$$\begin{array}{r} 176 \overline{) 2} \\ 176 \overline{) 88} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 88} \overline{) 44} \overline{) 2} \\ \quad 0 \overline{) 44} \overline{) 22} \overline{) 2} \\ \qquad 0 \overline{) 22} \overline{) 11} \overline{) 2} \\ \qquad\quad 0 \overline{) 10} \overline{) 5} \overline{) 2} \\ \qquad\qquad 1 \overline{) 4} \overline{) 2} \overline{) 2} \\ \qquad\qquad\quad 1 \overline{) 2} \overline{) 1} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Затем дробную часть числа

$$\begin{array}{r} 0,54 \overline{) 2} \\ \underline{1} \quad 08 \\ \quad 2 \\ \underline{0} \quad 16 \\ \quad 2 \\ \underline{0} \quad 32 \\ \quad 2 \\ \underline{0} \quad 64 \\ \quad 2 \\ \underline{1} \quad 28 \\ \quad 2 \\ \underline{0} \quad 56 \\ \quad 2 \\ \underline{1} \quad 12 \\ \quad \dots \end{array}$$

Получим двоичное число: 10110000.1000101 соответствующее десятичному 176,54. При этом дробная часть числа обрезана до 7 двоичных знаков. Для достижения приемлемой точности используется соответствие : 1 десятичный знак – 3.5 двоичных. То есть для двух десятичных знаков после запятой переводится $2 \cdot 3.5 = 7$ двоичных знаков. Это минимальная точность, но для учебного примера её достаточно.

Теперь переведем это число в 8-ричную систему счисления

$$\begin{array}{r}
 176 \overline{)8} \\
 \underline{176} \quad 22 \overline{)8} \\
 0 \quad \underline{16} \quad 2 \\
 \phantom{\underline{16}} \quad 6
 \end{array}$$

$176_{10} = 260_8$ подставляя двоичные коды из таблицы для восьмеричных цифр получим $010\ 110\ 000_2$
 Переводим дробную часть

$$\begin{array}{r}
 0,54 \\
 \hline
 8 \\
 4 \quad 32 \\
 \hline
 8 \\
 2 \quad 56 \\
 \hline
 8 \\
 4 \quad 48 \\
 \hline
 \dots\dots
 \end{array}$$

Получим $0,54_{10} \sim 0,424_8$ Подставляя соответствия двоичных кодов имеем дробную часть в 2 с.с. 0.100010100
 Полностью число в 2 с.с. будет иметь вид:
 $260,424_8 = 010\ 110\ 000.100010100_2$
 Перевод числа из десятичной системы в шестнадцатеричную, а затем в двоичную будет выглядеть так.
 Перевод целой части:

$$\begin{array}{r}
 176 \overline{)16} \\
 \underline{176} \quad 11 \\
 0
 \end{array}$$

$176_{10} = B0_{16}$
 Подставляя соответствующие двоичные коды из таблицы, получим.
 $B0_{16} = 1011\ 0000_2$
 Перевод дробной части:

$$\begin{array}{r}
 0,54 \\
 \hline
 16 \\
 8 \quad 64 \\
 \hline
 16 \\
 10 \quad 24 \\
 \hline
 \dots\dots
 \end{array}$$

Получим $0.54_{10} \sim 0.8A_{16}$ что в 2 с.с. соответствует $0.1000\ 1010_2$

Полностью число в 2 с.с. переведённое через 16-ричную систему имеет вид – $B0.8A_{16} = 1011\ 0000.1000\ 1010$

Как видно из полученных результатов двоичные числа во всех трёх случаях совпадают, то есть перевод выполнен правильно. То же самое необходимо выполнить и для второго числа. Двоичное значение второго числа равно $011\ 010\ 111.001010111$

Первое задание выполнено.

Задание 2

Перевести результат предыдущего задания из двоичной системы счисления в десятичную прямо, через восьмеричную и шестнадцатеричную.

Прямой перевод:

$$\frac{10110000.1000101}{8 \text{ знаков}} =$$

$$1*2^7+0*2^6+1*2^5+1*2^4+0*2^3+0*2^2+0*2^1+0*2^0+1*2^{-1}+0*2^{-2}+0*2^{-3}+0*2^{-4}+1*2^{-5}+0*2^{-6}+1*2^{-7}=176.5393\dots$$

Это приближённо соответствует исходному числу. Потеря точности происходит из за невозможности точного перевода дробной части десятичного числа в двоичное.

Теперь сделаем аналогичный перевод через восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

$$10110000.1000101_2 = 260.424_8$$

$$260.424_8 = 2*8^2+6*8^1+0*8^0+4*8^{-1}+2*8^{-2}+4*8^{-3} = 176.53906$$

$$B0.8A_{16} = B(11)*16^1 + 0*16^0 + 8*16^{-1} + A(10)*16^{-2} = 176.53906$$

Так же переведём и второе число. Вывод: все переводы сделаны правильно.

Второе задание выполнено.

Задание 3

Сложить два двоичных числа, полученных в первом задании и результат перевести в десятичную систему счисления.

1 число **0**1011 0000. 1000 1010**0**

2 число 011 010 111. 001010111

Красным цветом выделены незначащие нули добавленные для выравнивания длины двоичных чисел.

$$\begin{array}{r} \text{010110000.100010100} \\ + \\ \text{011010111.001010111} \\ \hline \text{110000111.101101011} \end{array}$$

Полученное число переведём в десятичную систему счисления

$$1*2^8+1*2^7+1*2^2+1*2^1+1*2^0+1*2^{-1}+1*2^{-3}+1*2^{-4}+1*2^{-6}+1*2^{-8}+1*2^{-9} = 391.70898$$

Этот результат соответствует десятичной сумме исходных чисел 391.71.

Задание выполнено.

Задания 4и 5

Произвести вычитание второго числа в двоичном коде из первого, переведя второе число в дополнительный код. Полученный результат, при необходимости, преобразовать в дополнительный код и перевести в десятичную систему счисления. Проверить правильность вычитания.

Пусть требуется выполнить две операции:

176- 154 и 176- 215

В первом случае результат будет положительный, а во втором – отрицательный. Переведем эти числа в двоичный код, например, через восьмеричную систему.

176 ₈	154 ₈	215 ₈
176 22 8	152 19 8	208 26 8
0 16 2	2 16 2	7 24 3
6	3	2

176 ₁₀ =260 ₈	154 ₁₀ =232 ₈	215 ₁₀ =327 ₈
010110000 ₂	010011010 ₂	011010111 ₂

инвертируем вычитаемые в обратный и дополнительный коды

101100101 _{обр}	100101000 ₂
+ 1	+ 1
101100110 _{доп}	100101001 _{доп}

теперь складываем уменьшаемое с дополнительными кодами обоих вычитаемых с учётом знаков

0 010110000	0 010110000
+ 1 101100110	+ 1 100101001
10 000010110	1 111011001

Переведём результат в восьмеричную систему

0 000 010 110	1 111 011 001
+ 0 2 ₈ 6 ₈	

первой операции возникла единица переполнения, но знак результата плюс, поэтому переводим число в восьмеричную систему и далее в десятичную: $26_8 = 2 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 22_{10}$, что соответствует результату первой операции.

во второй операции знак результата отрицательный, поэтому его придется перевести в дополнительный код:

111011001
000100110 _{обр}
+ 1
1 000 100 111 _{доп} = -47 ₈ = -(4*8 ¹ + 7*8 ⁰) = -39 ₁₀
- 0 4 ₈ 7 ₈

или с учётом знака -39.

Таблица соответствия кодов чисел в различных системах счисления

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
0	000	0	0
1	001	1	1
2	010	2	2
3	011	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Логические основы компьютерной техники. Пример.

Задание 1

Функция $Y=f(X_1, X_2, X_3)$ задана в виде формулы. Необходимо представить функцию в виде таблицы и найти СДНФ

Пусть дана функция $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3$. Необходимо выполнить указанное задание для этой функции.

Представим функцию в виде таблицы. Для этого подставим в формулу значения аргументов каждой строки таблицы, вычислим значения и подставим в столбец y . Например, вычисления по первой строке будут выглядеть так: $\bar{0} * 0 \vee 0 * 0 = 0$. Для третьей строки расчёт будет таким: $\bar{0} * 1 \vee 0 * 0 = 1$. Действительно, инверсия 0 будет 1, $1*1=1$ и $1 \vee 0 = 1$. И так для всех остальных строк.

X_1	X_2	X_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1

1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Теперь, пользуясь понятием конституенты единицы и определением СДНФ получим .

$$y = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Этот же СДНФ можно получить и аналитическим путём. Для этого умножим каждую конъюнкцию исходной формулы $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3$ на выражение $(x_i \vee \bar{x}_i)$, где i номер недостающего аргумента в каждой конъюнкции. Для нашего выражения это будет выглядеть так:

$y = \bar{x}_1 x_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 x_3 (x_2 \vee \bar{x}_2)$. В первом произведении (конъюнкции) недоставало x_3 , потому умножаем его на $(x_3 \vee \bar{x}_3)$, которое всегда равно 1. Во второй конъюнкции недостаёт x_2 , поэтому умножаем её на $(x_2 \vee \bar{x}_2)$. Раскрывая скобки, получим СДНФ как и из таблицы. Единственно порядок конъюнкций будет другим, но от перемены мест слагаемых сумма не меняется.

Здание 2

Функции трёх двоичных аргументов $Y=f(X_1, X_2, X_3)$ заданы в таблице. Необходимо представить функцию формулой СДНФ и минимизировать полученное выражение.

X_1	X_2	X_3	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Сначала получим СДНФ.

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Упростим полученное выражение.

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 (\bar{x}_2 \vee x_2)$$

Но $(\bar{x}_2 \vee x_2) = 1$. Теперь сгруппируем 1 и 3 члены вынеся за скобки x_3 и получим $y = x_3 (x_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$. Далее воспользуемся вторым распределительным законом $y = x_3 (x_1 \vee \bar{x}_1) (x_1 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$.

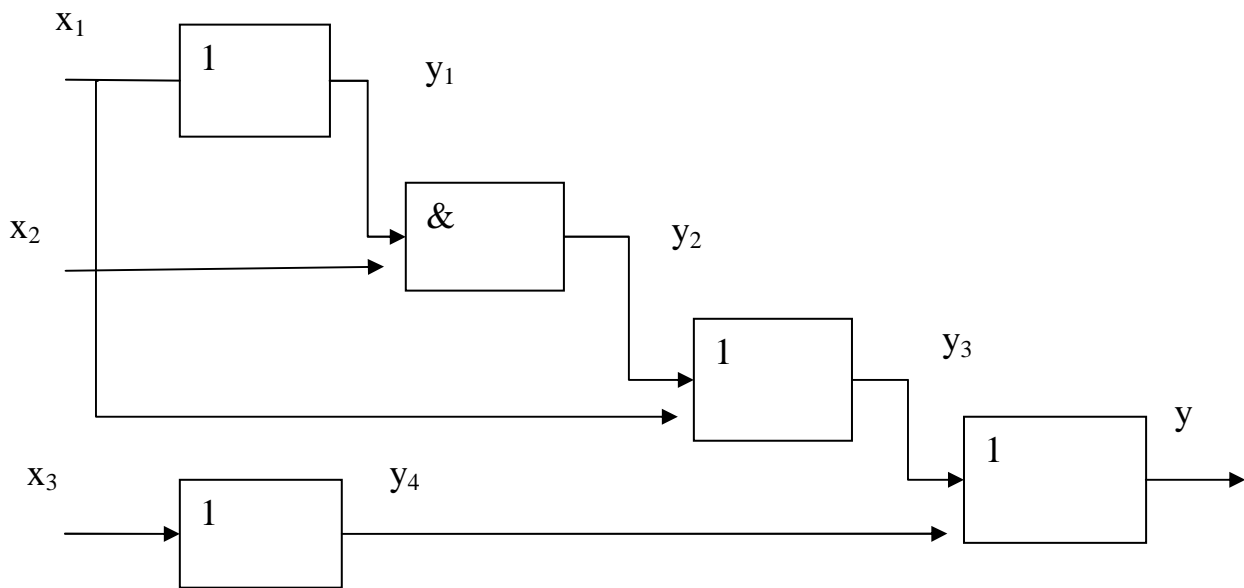
Учитывая что $(\bar{x}_1 \vee x_1) = 1$ получим тупиковое выражение

$$y = x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$$

Задание 3 Анализ автомата: требуется

- Определить функцию, реализуемую автоматом в виде формулы;
- Представить функцию в виде таблицы;
- Упростить структуру автомата.

Пусть дана схема автомата. Требуется выполнить её анализ.



Из схемы получим следующую систему логических уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{x}_1 \\ y_2 &= x_2y_1 \\ y_3 &= x_1 \vee y_2 \\ y_4 &= \bar{x}_3 \\ y &= y_3y_4 \end{aligned}$$

Подставляя выражения получим зависимость $y = f(x_1, x_2, x_3)$

$$y = y_3y_4 = (x_1 \vee y_2)\bar{x}_3 = (x_1 \vee x_2y_1)\bar{x}_3 = (x_1 \vee \bar{x}_1x_2)\bar{x}_3$$

Преобразуем полученную функцию в СДНФ

$$\begin{aligned} y &= (x_1 \vee \bar{x}_1x_2)\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 = x_1\bar{x}_3(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \\ &= x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \end{aligned}$$

Представим полученную функцию в виде таблицы.

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Попытаемся упростить функцию исходного автомата.

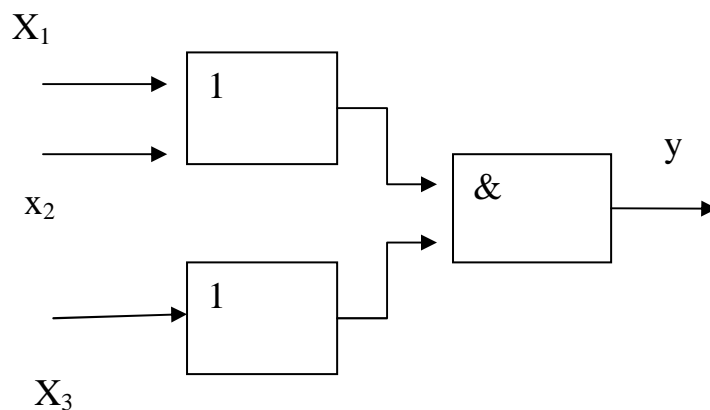
В соответствии со вторым распределительным законом часть исходного выражения $(x_1 \vee \bar{x}_1)x_2$ может быть упрощена следующим образом:

$$(x_1 \vee \bar{x}_1)x_2 = (x_1 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee x_2) = x_1 \vee x_2$$

Подставляя эту часть в исходное выражение, получим

$$y = (x_1 \vee x_2)\bar{x}_3$$

Строим схем автомата для полученного выражения



Задача решена.

Задание 4. Необходимо представить функцию в СДНФ и построить минимальный автомат на элементах И, ИЛИ, НЕ.

СДНФ из таблично заданной функции получается просто, поэтому рассмотрим вариант аналитически заданной функции.

$$Y = \overline{(X_1 \vee \bar{X}_2)(X_2 \vee X_3) \vee \bar{X}_2(\bar{X}_1 \vee X_3) \vee \bar{X}_3}$$

Преобразуем её к СДНФ используя теорему де Моргана.

$$Y = \overline{(X_1 \vee \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_2 \vee X_3) \vee \bar{X}_2(\bar{X}_1 \vee X_3) \vee \bar{X}_3}$$

$$Y = (\bar{X}_1 X_2) \vee (\bar{X}_2 \bar{X}_3) \vee \bar{X}_2(\bar{X}_1 \vee X_3) \vee \bar{X}_3$$

$$Y = \bar{X}_1 X_2 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_3$$

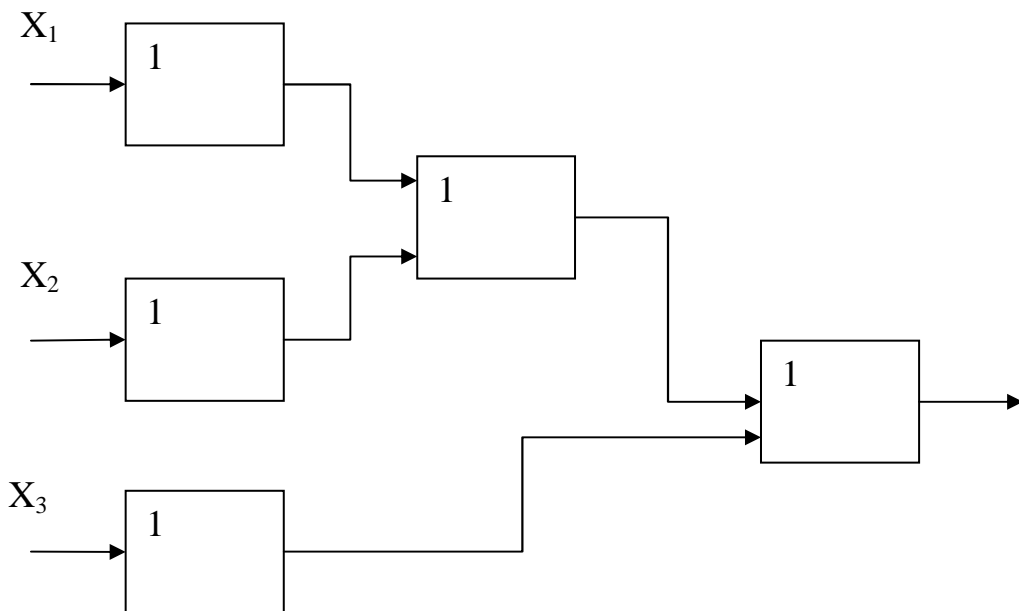
$$Y = (\bar{X}_1 X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_2 X_3) \vee \bar{X}_3$$

$$Y = \bar{X}_1(X_2 \vee \bar{X}_2) \vee \bar{X}_2(\bar{X}_3 \vee X_3) \vee \bar{X}_3$$

Поскольку $(X_i \vee \bar{X}_i) = 1$, то тупиковый вид формулы примет вид

$$Y = \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3$$

Конечный автомат для неё будет выглядеть так



Теперь построим СДНФ для этой функции

$$Y = \bar{X}_1(X_2 \vee \bar{X}_2)(\bar{X}_3 \vee X_3) \vee (X_1 \vee \bar{X}_1)\bar{X}_2(\bar{X}_3 \vee X_3) \vee (X_1 \vee \bar{X}_1)(X_2 \vee \bar{X}_2)\bar{X}_3$$

После раскрытия скобок получим

$$Y = \bar{X}_1 X_2 X_3 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee X_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee X_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3$$

Повторяющиеся члены выражения выделены красным цветом и их можно удалить без изменения значимости выражения. В итоге получим СДНФ

$$Y = \bar{X}_1 X_2 X_3 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 X_2 \bar{X}_3$$

и построим соответствующую ей табличную функцию.

X_1	X_2	X_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

То есть эта логическая функция будет возвращать 1 во всех случаях, кроме того когда все аргументы будут равны 1.