

Арифметические основы компьютерной техники. Пример.

Даны два числа:

176.54 и 215.17

Задание 1

Перевести числа в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления. Затем перевести числа в восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления в двоичную и сравнить результаты.

Переведём в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления первое число.

Сначала переводим целую часть первого числа.

$$\begin{array}{r} 176 \overline{) 2} \\ \underline{176} \quad 88 \overline{) 2} \\ 0 \quad 88 \quad 44 \overline{) 2} \\ \quad 0 \quad 44 \quad 22 \overline{) 2} \\ \quad \quad 0 \quad 22 \quad 11 \overline{) 2} \\ \quad \quad \quad 0 \quad 10 \quad 5 \overline{) 2} \\ \quad \quad \quad \quad 1 \quad 4 \quad 2 \overline{) 2} \\ \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Затем дробную часть числа

$$\begin{array}{r} 0,54 \\ \underline{\quad 2} \\ 1 \quad 08 \\ \underline{\quad 2} \\ 0 \quad 16 \\ \underline{\quad 2} \\ 0 \quad 32 \\ \underline{\quad 2} \\ 0 \quad 64 \\ \underline{\quad 2} \\ 1 \quad 28 \\ \underline{\quad 2} \\ 0 \quad 56 \\ \underline{\quad 2} \\ 1 \quad 12 \\ \dots \end{array}$$

Получим двоичное число: 10110000.1000101 соответствующее десятичному 176,54. При этом дробная часть числа обрезана до 7 двоичных знаков. Для достижения приемлемой точности используется соответствие : 1 десятичный знак – 3.5 двоичных. То есть для двух десятичных знаков после запятой переводится $2 \cdot 3.5 = 7$ двоичных знаков. Это минимальная точность, но для учебного примера её достаточно.

Перевод числа из десятичной системы в шестнадцатеричную, а затем в двоичную будет выглядеть так.

Перевод целой части:

$$\begin{array}{r|l} 176 & 16 \\ \hline 176 & 11 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$176_{10} = B0_{16}$$

Подставляя соответствующие двоичные коды из таблицы, получим.

$$B0_{16} = 1011\ 0000_2$$

Перевод дробной части:

$$\begin{array}{r|l} 0,54 & 16 \\ \hline 8 & 64 \\ \hline 10 & 24 \\ \hline \dots & \dots \end{array}$$

Получим $0.54_{10} \sim 0.8A_{16}$ что в 2 с.с. соответствует $0.1000\ 1010_2$

Полностью число в 2 с.с. переведённое через 16-ричную систему имеет вид – $B0.8A_{16} = 1011\ 0000.1000\ 1010$

Как видно из полученных результатов двоичные числа во всех трёх случаях совпадают, то есть перевод выполнен правильно. То же самое необходимо выполнить и для второго числа. Двоичное значение второго числа равно $011\ 010\ 111.001010111$

Первое задание выполнено.

Задание 2

Перевести результат предыдущего задания из двоичной системы счисления в десятичную прямо, через восьмеричную и шестнадцатеричную.

Прямой перевод:

$$\frac{10110000.1000101}{8 \text{ знаков}} =$$

$$1*2^7 + 0*2^6 + 1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 0*2^0 + 1*2^{-1} + 0*2^{-2} + 0*2^{-3} + 0*2^{-4} + 1*2^{-5} + 0*2^{-6} + 1*2^{-7} = 176.5393\dots$$

Это приближённо соответствует исходному числу. Потеря точности происходит из за невозможности точного перевода дробной части десятичного числа в двоичное.

Теперь сделаем аналогичный перевод через шестнадцатеричную систему счисления.

$$B0.8A_{16} = B(11)*16^1 + 0*16^0 + 8*16^{-1} + A(10)*16^{-2} = 176.53906$$

Так же переведём и второе число. Вывод: все переводы сделаны правильно. Второе задание выполнено.

Задание 3

Сложить два двоичных числа, полученных в первом задании и результат перевести в десятичную систему счисления.

1 число 01011 0000. 1000 10100

2 число 011 010 111. 001010111

Красным цветом выделены незначащие нули добавленные для выравнивания длины двоичных чисел.

$$\begin{array}{r} 010110000.100010100 \\ + \\ 011010111.001010111 \\ \hline 110000111.101101011 \end{array}$$

Полученное число переведём в десятичную систему счисления

$$1*2^8 + 1*2^7 + 1*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 1*2^{-3} + 1*2^{-4} + 1*2^{-6} + 1*2^{-8} + 1*2^{-9} = 391.70898$$

Этот результат соответствует десятичной сумме исходных чисел 391.71. Задание выполнено.

Задания 4 и 5

Произвести вычитание второго числа в двоичном коде из первого, переведя второе число в дополнительный код. Полученный результат, при необходимости, преобразовать в дополнительный код и перевести в десятичную систему счисления. Проверить правильность вычитания.

Пусть требуется выполнить две операции:

176- 154 и 176 -215

В первом случае результат будет положительный, а во втором – отрицательный. Переведем эти числа в двоичный код, например, через шестнадцатеричную систему счисления.

$$\begin{array}{r} 176 \overline{)16} \\ 176 \quad 11 \text{ (B)} \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 154 \overline{)16} \\ 144 \quad 9 \\ \hline 10 \text{ (A)} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 215 \overline{)16} \\ 208 \quad 13 \text{ (D)} \\ \hline 7 \end{array}$$

$$176 \rightarrow B0_{(16)} \qquad 154 \rightarrow 9A_{(16)} \qquad 215 \rightarrow D7_{(16)}$$

Для перевода из шестнадцатеричной системы в двоичную воспользуемся таблицей соответствия кодов.

Десятичная	Двоичная	Шестнадцатеричная
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

В результате получим

$$176 \rightarrow B0_{(16)} \rightarrow 10110000_2$$

$$154 \rightarrow 9A_{(16)} \rightarrow 10011010_2$$

$$215 \rightarrow D7_{(16)} \rightarrow 11010111_2$$

В операции 176- 154 второе число является вычитаемым, поэтому инвертируем его в обратный и дополнительный коды

$$\begin{array}{r} 10011010 \\ \underline{01100101} \text{ обр} \\ + \quad \quad \quad 1 \\ \underline{\quad \quad \quad 1} \\ 01100110 \text{ доп} \end{array}$$

теперь складываем двоичный код числа 176 с дополнительным кодом вычитаемого с учётом знаков

$$\begin{array}{r|l} 0 & 10110000 \\ + & 1 & 01100110 \\ \hline 10 & 00010110 \end{array}$$

Результат колонки, в которой указан знак 0, то есть он положительный.

Поэтому просто переводим его для проверки в десятичную систему счисления.

$$0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 22$$

$$176 - 154 = 22 \text{ все верно}$$

Теперь сделаем это для операции 176-215.

Переведем 11010111 (код 215) в дополнительный код.

$$\begin{array}{r} 11010111 \\ \underline{00101000} \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 00101001 \end{array}$$

Теперь выполним сложение двоичного кода числа 176 с полученным дополнительным кодом с учетом знаков.

$$\begin{array}{r} 0|10110000 \\ + \quad | \\ \hline 1|00101001 \\ \hline 1|11011001 \end{array}$$

Знак результата отрицательный (1), поэтому нужно преобразовать его в дополнительный код.

$$\begin{array}{r} 11011001 \\ \underline{00100110} \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 00100111 \end{array}$$

Теперь переведем его в десятичную с.с.

$$0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 39$$

Так как знак результата минус, результат -39. Проверка выполнена.

Логические основы компьютерной техники. Пример.

Задание 1

Функция $Y=f(X_1, X_2, X_3)$ задана в виде формулы. Необходимо представить функцию в виде таблицы и найти СДНФ

Пусть дана функция $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3$. Необходимо выполнить указанное задание для этой функции.

Представим функцию в виде таблицы. Для этого подставим в формулу значения аргументов каждой строки таблицы, вычислим значения и подставим в столбец y . Например, вычисления по первой строке будут выглядеть так: $\bar{0} * 0 \vee 0 * 0 = 0$. Для третьей строки расчёт будет таким: $\bar{0} * 1 \vee 0 * 0 = 1$. Действительно, инверсия 0 будет 1, $1 * 1 = 1$ и $1 \vee 0 = 1$. И так для всех остальных строк.

X_1	X_2	X_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0

1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Теперь, пользуясь понятием конъюнкты единицы и определением СДНФ получим .

$$y = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Этот же СДНФ можно получить и аналитическим путём. Для этого умножим каждую конъюнкцию исходной формулы $y = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3$ на выражение $(x_i \vee \bar{x}_i)$, где i номер недостающего аргумента в каждой конъюнкции. Для нашего выражения это будет выглядеть так:

$y = \bar{x}_1 x_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 x_3 (x_2 \vee \bar{x}_2)$. В первом произведении (конъюнкции) не хватало x_3 , потому умножаем его на $(x_3 \vee \bar{x}_3)$, которое всегда равно 1. Во второй конъюнкции не хватает x_2 , поэтому умножаем её на $(x_2 \vee \bar{x}_2)$. Раскрывая скобки, получим СДНФ как и из таблицы. Единственно порядок конъюнкций будет другим, но от перемены мест слагаемых сумма не меняется.

Здание 2

Функции трёх двоичных аргументов $Y=f(X1, X2, X3)$ заданы в таблице. Необходимо представить функцию формулой СДНФ и минимизировать полученное выражение.

X ₁	X ₂	X ₃	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Сначала получим СДНФ.

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

Упростим полученное выражение.

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 (\bar{x}_2 \vee x_2)$$

Но $(\bar{x}_2 \vee x_2) = 1$. Теперь сгруппируем 1 и 3 члены вынеся за скобки x_3 и получим $y = x_3 (x_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$. Далее воспользуемся вторым распределительным законом $y = x_3 (x_1 \vee \bar{x}_1) (x_1 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$.

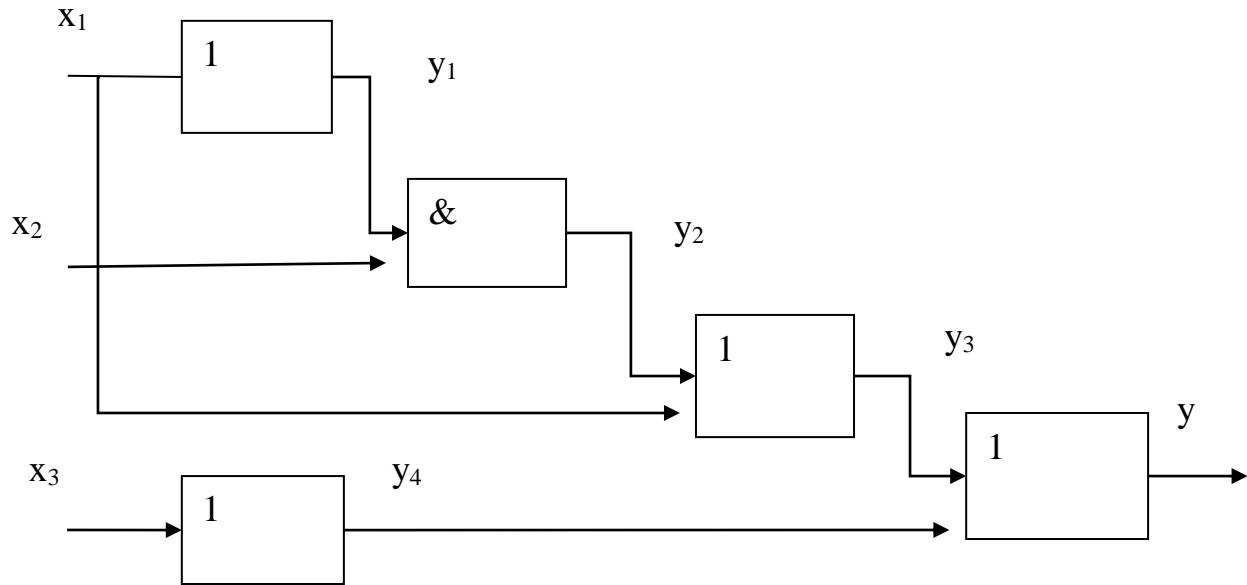
Учитывая что $(\bar{x}_1 \vee x_1) = 1$ получим тупиковое выражение

$$y = x_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$$

Задание 3 Анализ автомата: требуется

- Определить функцию, реализуемую автоматом в виде формулы;
- Представить функцию в виде таблицы;
- Упростить структуру автомата.

Пусть дана схема автомата. Требуется выполнить её анализ.



Из схемы получим следующую систему логических уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{x}_1 \\ y_2 &= x_2y_1 \\ y_3 &= x_2 \vee y_2 \\ y_4 &= \bar{x}_3 \\ y &= y_3y_4 \end{aligned}$$

Подставляя выражения получим зависимость $y = f(x_1, x_2, x_3)$

$$y = y_3y_4 = (x_2 \vee y_2)\bar{x}_3 = (x_2 \vee x_2y_1)\bar{x}_3 = (x_2 \vee \bar{x}_1x_2)\bar{x}_3$$

Преобразуем полученную функцию в СДНФ

$$\begin{aligned} y &= (x_2 \vee \bar{x}_1x_2)\bar{x}_3 = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 = x_2\bar{x}_3(x_1 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \\ &= x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \end{aligned}$$

Представим полученную функцию в виде таблицы.

X_1	X_2	X_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Попытаемся упростить функцию исходного автомата.

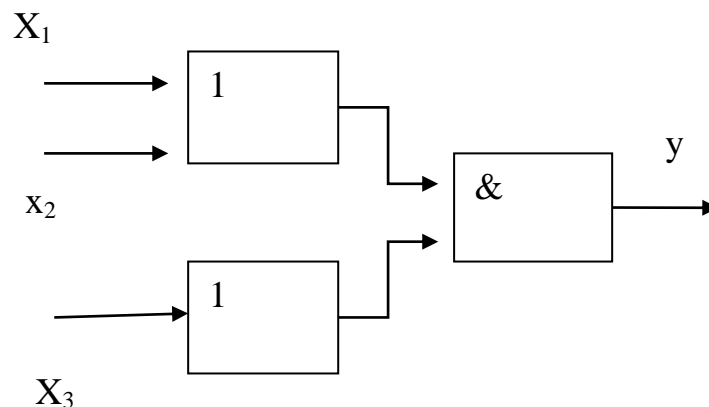
В соответствии со вторым распределительным законом часть исходного выражения $(x_1 \vee \bar{x}_1)x_2$ может быть упрощена следующим образом:

$$(x_1 \vee \bar{x}_1)x_2 = (x_1 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee x_2) = x_1 \vee x_2$$

Подставляя эту часть в исходное выражение, получим

$$y = (x_1 \vee x_2)\bar{x}_3$$

Строим схем автомата для полученного выражения



Задача решена.

Задание 4. Необходимо представить функцию в СДНФ и построить минимальный автомат на элементах И, ИЛИ, НЕ.

СДНФ из таблично заданной функции получается просто, поэтому рассмотрим вариант аналитически заданной функции.

$$Y = \overline{(X_1 \vee \bar{X}_2)(X_2 \vee X_3)} \vee \bar{X}_2(\bar{X}_1 \vee X_3) \vee \bar{X}_3$$

Преобразуем её к СДНФ используя теорему де Моргана.

$$Y = \overline{(X_1 \vee \bar{X}_2)} \vee \overline{(\bar{X}_2 \vee X_3)} \vee \bar{X}_2(\bar{X}_1 \vee X_3) \vee \bar{X}_3$$

$$Y = (\bar{X}_1 X_2) \vee (\bar{X}_2 \bar{X}_3) \vee \bar{X}_2(\bar{X}_1 \vee X_3) \vee \bar{X}_3$$

$$Y = \bar{X}_1 X_2 \vee \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \vee \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_3$$

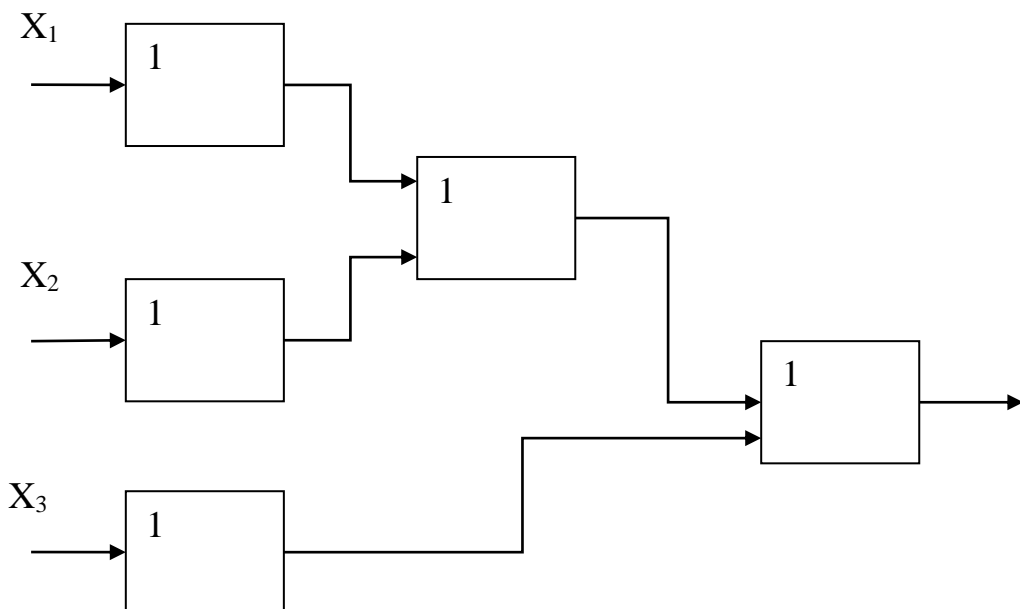
$$Y = (\bar{X}_1 X_2 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2) \vee (\bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_2 X_3) \vee \bar{X}_3$$

$$Y = \bar{X}_1(X_2 \vee \bar{X}_2) \vee \bar{X}_2(\bar{X}_3 \vee X_3) \vee \bar{X}_3$$

Поскольку $(X_i \vee \bar{X}_i) = 1$, то тупиковый вид формулы примет вид

$$Y = \bar{X}_1 \vee \bar{X}_2 \vee \bar{X}_3$$

Конечный автомат для неё будет выглядеть так



Теперь построим СДНФ для этой функции

$$Y = \bar{X}_1(X_2 \vee \bar{X}_2)(\bar{X}_3 \vee X_3) \vee (X_1 \vee \bar{X}_1)\bar{X}_2(\bar{X}_3 \vee X_3) \vee (X_1 \vee \bar{X}_1)(X_2 \vee \bar{X}_2)\bar{X}_3$$

После раскрытия скобок получим

$$Y = \bar{X}_1 X_2 X_3 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3$$

Повторяющиеся члены выражения выделены красным цветом и их можно удалить без изменения значимости выражения. В итоге получим СДНФ

$$Y = \bar{X}_1 X_2 X_3 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 \vee X_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3 \vee \bar{X}_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 \bar{X}_2 X_3 \vee X_1 X_2 \bar{X}_3$$

и построим соответствующую ей табличную функцию.

X_1	X_2	X_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

То есть эта логическая функция будет возвращать 1 во всех случаях, кроме того когда все аргументы будут равны 1.